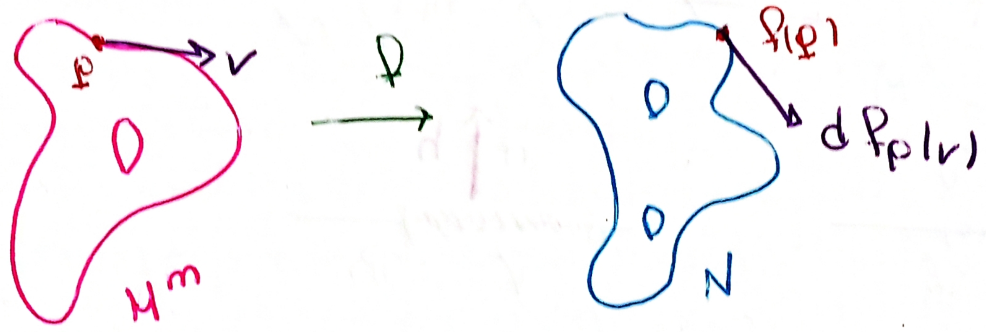
§ Διαφορικό Απεικονίσεων

Υποθέτουμε ότι $M^m \subseteq \mathbb{R}^k$ και $N^n \subseteq \mathbb{R}^\ell$ είναι δύο πολυπτύγματα. Έστω $f: M^m \to N^n$ διαφορίσιμη απεικόνιση.

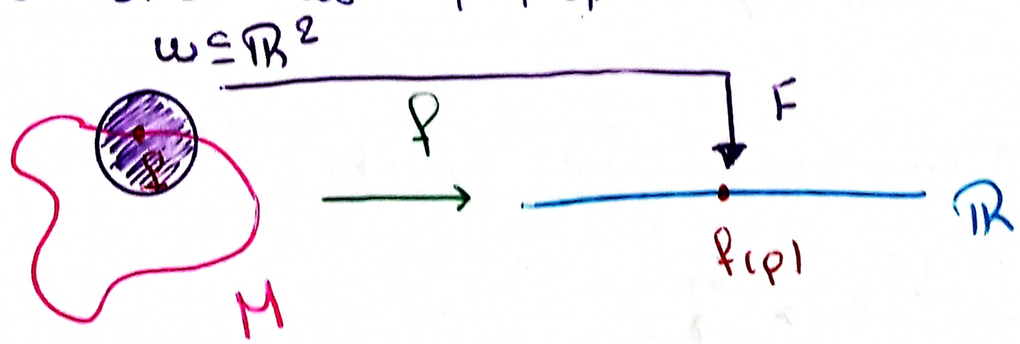


Το διαφορικό της f στο σημείο p είναι μια γραμμική απεικόνιση $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ η οποία ορίζεται ως εξής:

Θεωρούμε ένα ανοικτό $\omega \subseteq \mathbb{R}^k$ γύρω από το σημείο p και επέκταση $F: \omega \to \mathbb{R}^\ell$ της απεικόνισης f. Τότε θέτουμε $df_p(v) = dF_p(v)$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ 1 Τέτοιες επεκτάσεις υπάρχουν

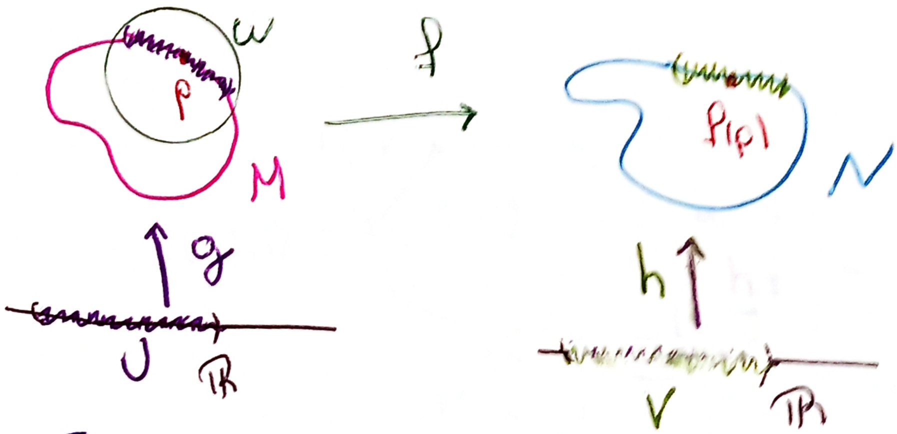
ΣΗΜΕΙΩΣΗ 2 Στην πράξη πολλές φορές η f θα δίνεται ως περιορισμός κάποιας F.



Λημμα

Ο ορισμός του διαφορικού δεν εξαρτάται από την επιλογή της επέκτασης

Αποδειξη



Επιλέγουμε παραμετρήσεις $g: U \subseteq \mathbb{R}^m \to M^m \subseteq \mathbb{R}^k$ γύρω από το σημείο p και παραμέτρηση $h: V \subseteq \mathbb{R}^n \to N^n \subseteq \mathbb{R}^l$ γύρω από το σημείο $f(p)$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $g(U) \subseteq W \equiv$ πεδίο ορισμού της επέκτασης F. Αποκτούν το εξής μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^l \\ U \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h^{-1}\circ f\circ g"'] & V \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

Απο τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^k \arrow[r, "dF_p"] & \mathbb{R}^l \\ \mathbb{R}^m \arrow[u, "dg_u"] \arrow[r, "d(h^{-1}\circ f\circ g)_u"'] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "dh_v"'] \end{tikzcd}$$

όπου $u \in \mathbb{R}^m$ με $g(u) = p$ και $v \in \mathbb{R}^n$ με $h(v) = f(p)$

Άρα,

$$df_p\,(=dF_p) = dh_v \circ d(h^{-1}\circ f\circ g)_u \circ (dg_u)^{-1}$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ! Το δεξί μέρος της παραπάνω ταυτότητας δεν περιέχει την επέκταση F. Άρα το διαφορικό δεν εξαρτάται από την επέκταση.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1

Από τον τύπο $df_p = dh_v \circ d(h^{-1}\circ f\circ g)\circ (dg_u)^{-1}$ συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας του διαφορικού της f στο p ως προς τις παραμετρήσεις g και h ισούται με τον πίνακα του διαφορικού της $h^{-1}\circ f\circ g$ από σημείο $u = g^{-1}(x)$

$$\begin{tikzcd}
M^m \arrow[r, mapsto, "f"] & N^n \\
U\subseteq \mathbb{R}^m \arrow[u, "g"] \arrow[r, mapsto, "h^{-1}\circ f\circ g"'] & V\subseteq \mathbb{R}^n \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

- Βασιζόμενοι στην παρατήρηση 1, μπορούμε να αποδείξουμε τις εξής ιδιότητες.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. Έστω $f: M^m \to N^n$ και $g: N^n \to P^l$ διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ πολυπτυγμάτων. Τότε $d(g\circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$

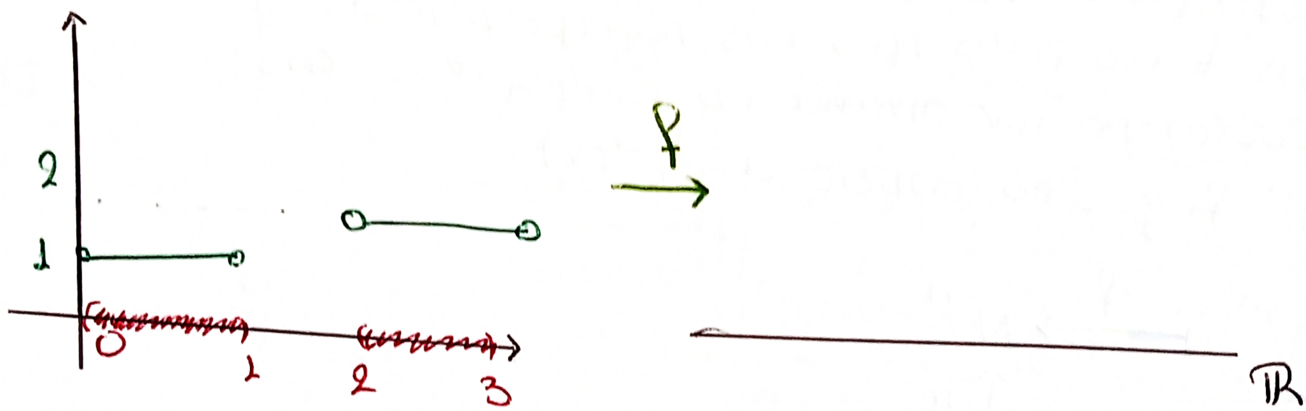
2. Έστω ότι $f: M^m \to N^n$ είναι διαφορομορφισμός (f διαφ., 1-1, επί και f^{-1} διαφ.). Τότε $\forall p \in M^m$ το διαφορικό $df_p: T_pM \to T_{f(p)}N$ είναι ισομορφισμός. (γραμμική, 1-1, επί)

Άρα σε αυτή την περίπτωση

$\dim T_p M = \dim T_{f(p)} N \Rightarrow m = n$

3. Έστω $f: M^m \to N^n$ τέτοια ώστε $df_p = 0 \ \forall p \in M^m$. Εάν M^m είναι συνεκτικό $\Rightarrow$ f σταθερή.

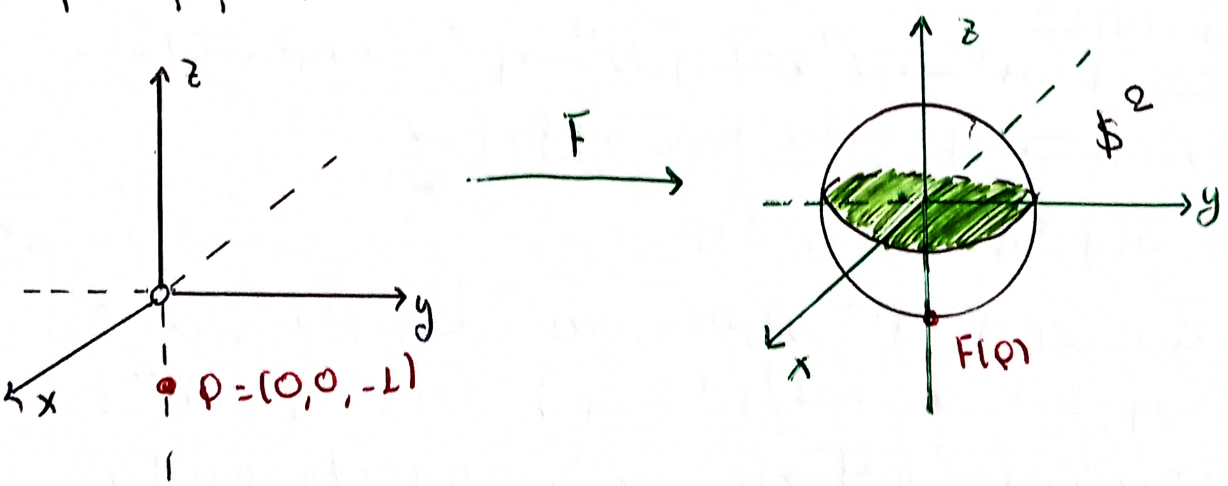
ΣΗΜΕΙΩΣΗ Η υπόθεση M^m συνεκτικό είναι απαραίτητη!



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας θεωρήσουμε την απεικόνιση $F: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ με τύπο $F(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Θα υπολογίσουμε το διαφορικό της F στο σημείο $p = (0,0,-1)$



Παρατηρούμε ότι $F(p)=(0,0,-1)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3\setminus\{0\} \arrow[r, "F"] & S^2 \\ \mathbb{R}^3\setminus\{0\} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "h^{-1}\circ F"'] & V\subseteq\mathbb{R}^2 \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

h ← πρέπει να την βρούμε

$\sqrt{}$ και να βρω και αυτή την απεικόνιση

όπου $h: V\to S^2$ παραμέτρηση της S^2 γύρω από το σημείο $F(p)=(0,0,-1)$

Μια τέτοια παραμέτρηση είναι:

$h(u,v)=(u,v,-\sqrt{1-u^2-v^2})$

$h: B_0(1)\subseteq\mathbb{R}^2\to S^2\subseteq\mathbb{R}^3$ με τύπο

όπου $B_0(1)=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2: u^2+v^2<1\}$

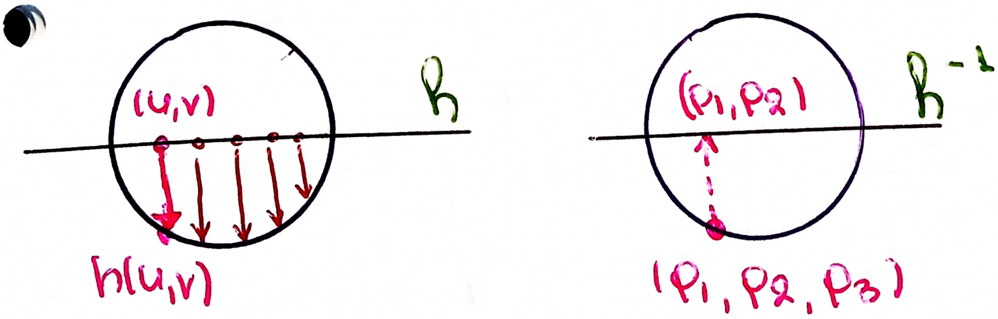
$x^2+y^2+z^2=1$

$z^2=1-x^2-y^2\Rightarrow$

$z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$

$-$ επειδή είναι στο κάτω ημισφαίριο

Παρατηρούμε ότι η αντίστροφη της h είναι:



Άρα h^{-1} είναι ο περιορισμός της προβολής $\pi: S^2\to B_0(1)$ με τύπο $\pi(p_1,p_2,p_3)=(p_1,p_2)$

Επομένως, $\underbrace{(h^{-1}\circ F\circ i)(x,y,z)}_{G(x,y,z)}=\left(\underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}_{G_1},\underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}_{G_2}\right)$

Ο πινακας του διαφορικού της F στο σημείο p ως προς της παραμετρήσεις i και h είναι

$$dF_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x}(0,0,-1) & \frac{\partial G_2}{\partial x}(0,0,-1) \\ \frac{\partial G_1}{\partial y}(0,0,-1) & \frac{\partial G_2}{\partial y}(0,0,-1) \\ \frac{\partial G_1}{\partial z}(0,0,-1) & \frac{\partial G_2}{\partial z}(0,0,-1) \end{pmatrix} = \ldots$$

ΕΡΩΤΗΜΑ: Τι θα γινόταν αν παίρναμε άλλη παραμέτρηση γύρω από το σημείο F(p)? Θα προκύψει ο ίδιος πινακας? ΟΧΙ

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ γραμμική απεικόνιση. πως ορίζεται ο πινακας της T?

$\{\vec{e_1} = (1,0,0), \vec{e_2} = (0,1,0), \vec{e_3} = (0,0,1)\}$

$\{\vec{\varepsilon_1} = (1,0), \vec{\varepsilon_2} = (0,1)\}$ (1)

$T(\vec{e_1}) = a_1\vec{\varepsilon_1} + b_1\vec{\varepsilon_2}$

$T(\vec{e_2}) = a_2\vec{\varepsilon_1} + b_2\vec{\varepsilon_2}$

$T(\vec{e_3}) = a_3\vec{\varepsilon_1} + b_3\vec{\varepsilon_3}$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

Αντί για (1) να πάρω τη βάση $\{\vec{\varepsilon_1^*} = (1,1), \vec{\varepsilon_2^*} = (-1,1)\}$

Μετά από υπολογισμούς, ο πινακας θα είναι διαφορετικός.

Ο πινακας του διαφορικού εξαρτάται από τις παραμετρήσεις. Εξάλλου και ο πινακας μιας γραμμικής απεικόνισης εξαρτάται από τις βάσεις που επιλέγουμε

Οι παραμετρήσεις που επιλέξαμε "προσδιορίζουν" τις αντίστοιχες βάσεις στους αντίστοιχους εφαπτόμενους χώρους.

ΑΣΚΗΣΗ H.W.

Υπολογίστε τον πίνακα του διαφορικού της F στο σημείο

επιλέγεται ως παραμέτρηση γύρω από το σημείο F(p)

α) Σφαιρικές συντεταγμένες

β) στερεογραφική προβολή.

§ Εμβαπτίσεις κ' εμφυτεύσεις

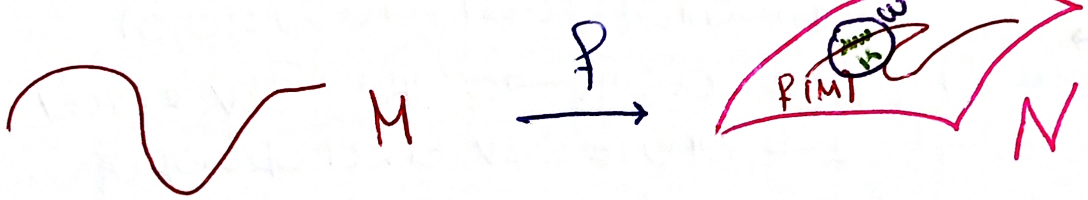
ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω ότι $f: M^m \to N^n$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση. Θα λέμε ότι η f είναι

α) εμβάπτιση αν-ν $\operatorname{rank} df_p = m$ $\forall p \in M^m$

β) εμφύτευση αν-ν η f είναι εμβάπτιση και επιπλέον η $f: \boxed{M^m} \to \boxed{f(M^m)} \subseteq N^m$ είναι ομοιομορφισμός όταν το $f(M^m)$ έχει εφοδιαστεί με την επαγόμενη τοπολογία

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1



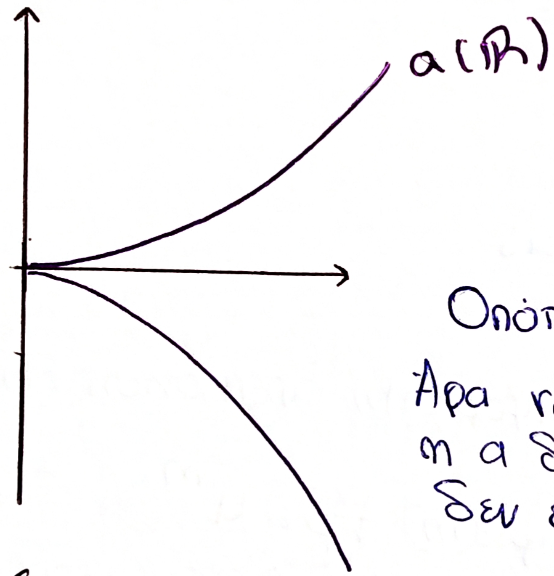
Η επαγόμενη τοπολογία στο $f(M)$ ορίζεται ως εξής.
Ένα σύνολο $k \subseteq f(M)$ θα λέγεται ανοικτό όταν προκύπτει ως τομή ενός ανοικτού ω του N με το $f(M)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (2)

Εάν η f είναι εμβάπτιση τότε αναγκαστικά $m \leq n$
(Προκύπτει από το Θεώρημα διαστάσεων γραμμικών απεικονίσεων)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (1)

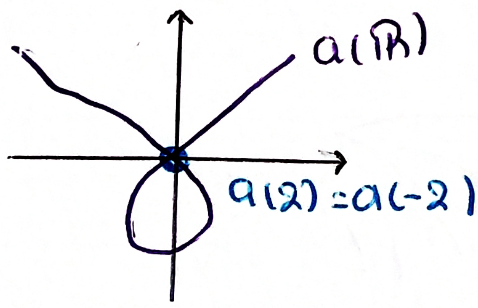
Ας θεωρήσουμε την απεικόνιση $a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $a(t) = (t^2, t^3)$



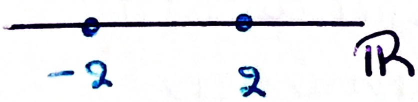
Η απεικόνιση a είναι διαφορίσιμη διότι κάθε συνιστώσα της είναι διαφορίσιμη. Ο "πίνακας" του διαφορικού είναι $a'(t)$.
Οπότε, $a'(t) = (2t, 3t^2) \Rightarrow a'(0) = (0,0)$
Άρα $\operatorname{rank} da_0 = 0$ και κατά συνέπεια η a δεν είναι εμβάπτιση, επομένως δεν είναι ούτε εμφύτευση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (2)

Ας θεωρήσουμε την απεικόνιση $a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με τύπο
$a(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$



Η απεικόνιση a είναι διαφορίσιμη διότι κάθε συνιστώσα της είναι διαφορίσιμη. Επίσης, $a(2) = a(-2) = (0,0)$
Άρα $a: \mathbb{R} \to a(\mathbb{R})$ δεν είναι 1-1, οπότε δεν είναι ομοιομορφισμός. Επομένως, δεν είναι εμφύτευση.

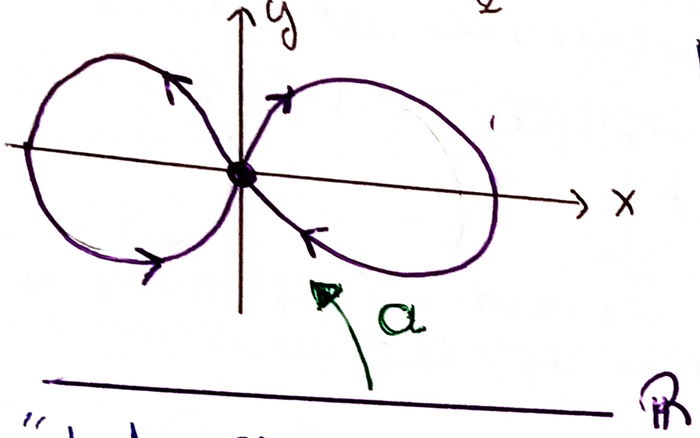


Μπορεί, όμως να είναι εμβάπτιση καθώς δεν απαιτεί 1-1, ομοιομορφ., αλλά μόνο τη βαθμίδα να είναι η μέγιστη

Πάλι το διαφορικό της α "εξαρτάται" από την παράγωγο α'. Υπολογίζουμε $\alpha'(t) = (3t^2-4,\ 2t) \neq (0,0)$ $\Rightarrow \operatorname{rank} d\alpha = 1 \Rightarrow$ α είναι εμβάπτιση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Ας θεωρήσουμε την απεικόνιση $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $\alpha(t) = (\sin t, \frac{1}{2}\sin 2t)$

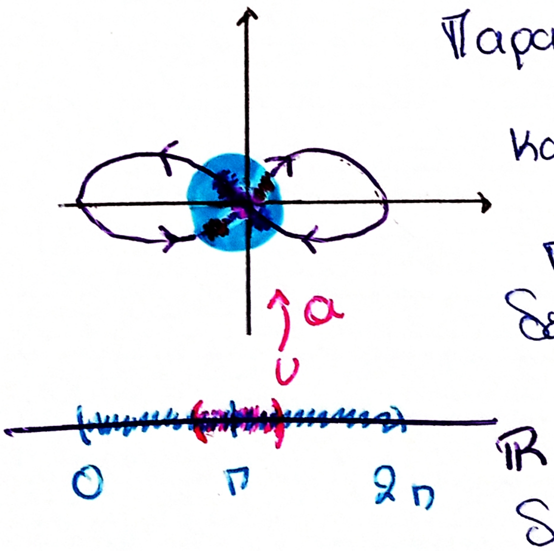


Η καμπύλη α είναι εμβάπτιση διότι $\alpha'(t) \neq (0,0)\ \forall t \in \mathbb{R}$ (όπως προηγουμένως). Από την άλλη η α δεν είναι εμφύτευση διότι $\alpha : \mathbb{R} \to \alpha(\mathbb{R})$ δεν είναι "1-1", αφού $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$

ΕΡΩΤΗΜΑ Μπορούμε να περιορίσουμε την α σε κάποια περιοχή του $\mathbb{R}$ όπου θα είναι εμφύτευση;

1η προσπάθεια

Ας περιοριστούμε στο διάστημα $(0, 2\pi)$



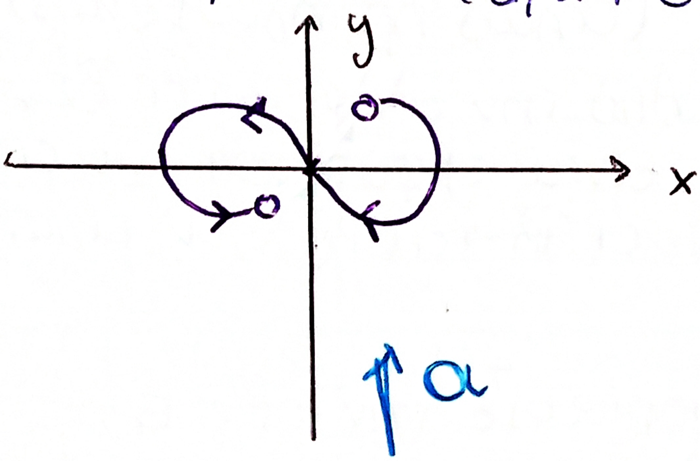
Παρατηρούμε ότι $\lim_{t\to 0} \alpha(t) = (0,0)$ και $\lim_{t\to 2\pi} \alpha(t) = (0,0)$

Παρ' όλα αυτά η $\alpha : (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$ δεν είναι εμφύτευση. Ο λόγος οφείλεται στο γεγονός ότι η $\alpha : (0,2\pi) \to \alpha(0,2\pi)$ δεν είναι ομοιομορφισμός.

Εάν ήταν ομοιομορφισμός θα έπρεπε να απεικονίζει ανοιχτά σύνολα σε ανοιχτά σύνολα. Αυτό, όμως, δεν γίνεται.

Η περιοχή α(U) δεν είναι ανοιχτή και συνεκτική περιοχή των α(0, 2π) διότι κάθε τομή της α(0, 2π) με μπάλα του $\mathbb{R}^2$ με κέντρο το (0,0) δεν είναι συνεκτική.

2η προσπάθεια Μπορούμε αποφύγουμε αυτή την τοπολογική παθολογία μικραίνοντας και άλλο το διάστημα ορισμού. Συγκεκριμένα περιορίζουμε το διάστημα στο $(\varepsilon, 2\pi-\varepsilon)$ με $\varepsilon>0$



Σε αυτή την περίπτωση η α είναι εμφύτευση.